COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Expression de $dr, d\theta, d\varphi$ en fonction de dx, dy, dz par inversion de la matrice de transition (calcul exhaustif).

$$\overrightarrow{OM} = rsin\theta cos\varphi.\overrightarrow{u_x} + rsin\theta sin\varphi.\overrightarrow{u_y} + rcos\theta.\overrightarrow{u_z}$$

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

Différentiation

$$\begin{cases} dx = drsin\theta cos\varphi + rcos\theta cos\varphi d\theta - rsin\theta sin\varphi d\varphi \\ dy = drsin\theta sin\varphi + rcos\theta sin\varphi d\theta + rsin\theta cos\varphi d\varphi \\ dz = drcos\theta - rsin\theta d\theta \end{cases}$$

Matrice de transition T

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta sin\varphi \\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Inversion de la matrice

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}.Adj(T)$$

calcul du déterminant de la matrice

$$\det(T) = sin\theta cos\varphi(r^2 sin^2\theta cos\varphi) + rcos\theta cos\varphi(rsin\theta cos\varphi cos\theta) - rsin\theta sin\varphi(-rsin^2\theta sin\varphi - rcos^2\theta sin\varphi)$$
$$= r^2 sin\theta(cos^2\varphi sin^2\theta + cos^2\theta cos^2\varphi + sin^2\theta sin^2\varphi + cos^2\theta sin^2\varphi)$$
$$= r^2 sin\theta(cos^2\varphi(sin^2\theta + cos^2\theta) + sin^2\varphi(sin^2\theta + cos^2\theta))$$

Soit

$$\det(T) = r^2 sin\theta$$

calcul de la matrice adjointe

expression de la transposée t_T

$$t_T = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ rcos\theta cos\varphi & rcos\theta sin\varphi & -rsin\theta \\ -rsin\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

calcul des 9 cofacteurs (déterminants des sous-matrices de t_T)

1. $\begin{pmatrix} X & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} rcos\theta sin\varphi & -rsin\theta \\ rsin\theta cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = r^2 sin^2\theta cos\varphi$	2. $\begin{pmatrix} \cdot & X & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta \\ -rsin\theta sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = -r^2 sin^2\theta sin\varphi$
3. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} rcos\theta cos\varphi & rcos\theta sin\varphi \\ -rsin\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \end{pmatrix} = r^2 cos\theta sin\theta$	4. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ X & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ rsin\theta cos\varphi & 0 \end{pmatrix} = -rcos\theta sin\theta cos\varphi$
5. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & X & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & cos\theta \\ -rsin\theta sin\varphi & 0 \end{pmatrix} = rsin\theta sin\varphi cos\theta$	6. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & X \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi \\ -rsin\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi \end{pmatrix} = rsin^2\theta$
7. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ rcos\theta sin\varphi & -rsin\theta \end{pmatrix} = -rsin\varphi$	8. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & X & \cdot \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & cos\theta \\ rcos\theta cos\varphi & -rsin\theta \end{pmatrix} = -rcos\varphi$
9. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & X \end{pmatrix}$; $det\begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi \\ rcos\theta cos\varphi & rcos\theta sin\varphi \end{pmatrix} = 0$	

expression de la matrice obtenue

$$\begin{pmatrix} r^2 sin^2\theta cos\varphi & -r^2 sin^2\theta sin\varphi & r^2 cos\theta sin\theta \\ -rcos\theta sin\theta cos\varphi & rsin\theta sin\varphi cos\theta & rsin^2\theta \\ -rsin\varphi & -rcos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

application de la règle des signes $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

la matrice adjointe est donc $Adj(T) = \begin{pmatrix} r^2 sin^2\theta cos\varphi & r^2 sin^2\theta sin\varphi & r^2 cos\theta sin\theta \\ rcos\theta sin\theta cos\varphi & rsin\theta sin\varphi cos\theta & -rsin^2\theta \\ -rsin\varphi & rcos\varphi & 0 \end{pmatrix}$

La matrice inverse est donc $T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}.Adj(T) = \frac{1}{r^2 sin\theta}\begin{pmatrix} r^2 sin^2\theta cos\varphi & r^2 sin^2\theta sin\varphi & r^2 cos\theta sin\theta \\ rcos\theta sin\theta cos\varphi & rsin\theta sin\varphi cos\theta & -rsin^2\theta \\ -rsin\varphi & rcos\varphi & 0 \end{pmatrix}$

soit $T^{-1} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ \frac{1}{r}cos\theta cos\varphi & \frac{1}{r}sin\varphi cos\theta & -\frac{1}{r}sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{sin\varphi}{sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{cos\varphi}{sin\theta} & 0 \end{pmatrix}$

on a donc

$$\begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sin\theta cos\varphi & sin\theta sin\varphi & cos\theta \\ \frac{1}{r}cos\theta cos\varphi & \frac{1}{r}sin\varphi cos\theta & -\frac{1}{r}sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{sin\varphi}{sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{cos\varphi}{sin\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

soit finalement

$$\begin{cases} dr = sin\theta cos\varphi.dx + sin\theta sin\varphi.dy - cos\theta.dz \\ d\theta = \frac{1}{r}cos\theta cos\varphi.dx + \frac{1}{r}sin\varphi cos\theta.dy - \frac{1}{r}sin\theta.dz \\ d\varphi = -\frac{1}{r}\frac{sin\varphi}{sin\theta}.dx + \frac{1}{r}\frac{cos\varphi}{sin\theta}.dy \end{cases}$$